Unidad

2 Análisis Dimensional

Introducción

Cuando un cierto fenómeno está influenciado por una gran cantidad de factores, tales que el estudio matemático resulta tan complejo que no se puede obtener soluciones prácticas desde el punto de vista ingenieril, es necesario recurrir a otras técnicas.

Una técnica que conjuga la observación experimental con la lógica matemática es el análisis dimensional. Este tipo de técnica tiene aplicación en diversos campos: mecánica de los fluidos, transferencia de calor, diseño de bombas y turbinas hidráulicas, operaciones unitarias de transferencia de masa y otras.

Contenido

Esta unidad consta de los siguientes temas:

Tema 1
Análisis Dimensional

El análisis dimensional es un método por el cual se deduce información sobre un fenómeno dado a partir de la simple suposición de que tal fenómeno puede ser descrito por una ecuación dimensionalmente correcta en la que intervienen ciertas variables, de las cuales se supone o se ha demostrado experimentalmente que depende tal fenómeno.

El uso de este método requiere un conocimiento amplio del fenómeno y sobre todo de los factores que lo afectan si se desean obtener resultados correctos útiles.

Definiciones

Magnitudes físicas: Son aquellas variables o cantidades que aparecen en el estudio de un fenómeno físico. Ejemplos: longitud, masa, tiempo, temperatura, velocidad, aceleración, fuerza, energía, densidad, peso específico, presión, viscosidad, conductividad térmica, coeficientes de transferencia de calor, resistencia eléctrica.

Unidades: Son las medidas estandarizadas para las magnitudes físicas.

Ejemplos: longitud: [ft]; [m]; [cm]; [km]; [in]

Peso específico; $\left[\dfrac{\text{kgf}}{\text{cm}^3}\right];\left[\dfrac{\text{N}}{\text{m}^3}\right];\left[\dfrac{\text{lbf}}{\text{ft}^3}\right]$

Tiempo: [s]; [h]; [min]

Sigue........

Continuación de Definiciones........

Dimensiones: Son los símbolos estandarizados que se asocian a una magnitud física.

Ejemplos: Aceleración: $\left[\dfrac{L}{T^2}\right]$

Fuerza: $\left[\dfrac{ML}{T^2}\right]$

Longitud: $[L]$

Dimensiones primarias. Se entiende por dimensiones primarias aquellas que no pueden ser expresadas en función de otras dimensiones.

Ejemplo 1 Las dimensiones de la aceleración son $[L]/[T]^2$, mientras que las dimensiones de una longitud sólo puede expresarse como [L].

Ocurre que algunas magnitudes se consideran como dimensiones primarias y otras veces como magnitudes con dimensiones derivadas.

Ejemplo 2 La magnitud física fuerza se puede considerar como una magnitud con dimensiones primarias [F], mientras que otras veces se la considera como magnitud derivada al expresar sus dimensiones como: $[M][L]/[T]^2$.

Otro caso es el del calor, el cual se puede utilizar como magnitud primaria con dimensiones [Q] y otras veces se puede utilizar con dimensiones derivadas expresándolo como una forma de energía, teniendo entonces las dimensiones siguientes: [F][L] o bien $[M][L]^2/[T]^2$.

Sigue........

Continuación de Definiciones........

Sistema de dimensiones: Se pueden establecer los siguientes sistemas de dimensiones en función del número y tipo de dimensiones primarias independientes que se utilicen:

a) Sistema: [L]; [M]; [T]; [θ]
(longitud, masa, tiempo, temperatura) -Sistema absoluto.

b) Sistema: [L]; [F]; [T]; [θ]
(longitud, fuerza, tiempo, temperatura) -Sistema gravitacional.

c) Sistema: [L]; [M]; [F]; [T]; [θ]
(longitud, masa, fuerza, tiempo, temperatura) -Sistema ingenieril.

Muchos problemas prácticos en Ingeniería Química no pueden ser resueltos completamente a través de modelos matemáticos debido a la gran complejidad de los mismos, complejidad que puede llegar a tal grado de ser imposible hallarles solución analítica y, en algunas oportunidades, tampoco solución numérica. En estos casos y ante la necesidad del Ingeniero de modelar un proceso en particular, se pueden utilizar datos obtenidos experimentalmente para resolver estos problemas complejos. La solución puede ser obtenida mediante el uso combinado del Análisis Dimensional y de datos o resultados experimentales. Para ilustrar lo dicho en el párrafo anterior expliquemos a través de un ejemplo cómo el análisis dimensional puede ayudar a modelar un fenómeno físico de complejidad sencilla.

Ejemplo 3 Supongamos que estamos interesados en calcular la caída de presión en una tubería de pared lisa por unidad de longitud.

Sigue........

Continuación de Análisis Dimensional........

Se conoce que la caída de presión dentro de una tubería por unidad de longitud (Δp_l) es función del diámetro interno del tubo (D), la densidad del fluido (ρ), la viscosidad del fluido (μ) y la velocidad promedio del fluido dentro de la tubería (V). Es decir: $\Delta p_l = f(D, \rho, \mu, V)$.

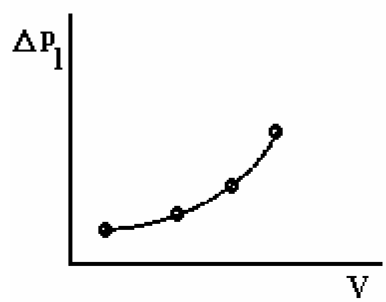
Sin plantear los balances de Cantidad de Movimiento necesarios para modelar el flujo dentro de una tubería lisa, sería posible hallar la forma de la función *f* sólo conociendo las variables independientes y aplicando el método de análisis dimensional.

Pero sigamos con el ejemplo para poder ilustrar mejor las ventajas de la técnica dimensional.

Si se quiere estudiar la influencia que las variables independientes tienen sobre la caída de presión, se pueden diseñar un set de cuatro experimentos, a saber:

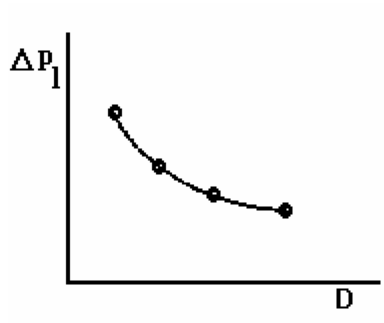
Experimento 1:

Medir la caída de presión para diferentes velocidades (V) de flujo, manteniendo constante el diámetro (D), la densidad (ρ) y la viscosidad (μ) del fluido.



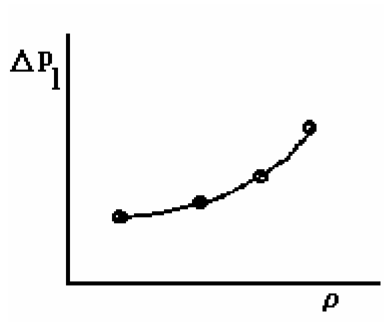
Experimento 2:

Medir la caída de presión para diferentes diámetros de tubería, manteniendo constante la velocidad, la densidad y la viscosidad del fluido.



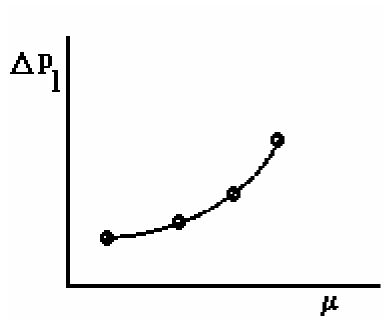
Experimento 3:

Medir la caída de presión para diferentes densidades de fluido, manteniendo constante el diámetro del tubo, la velocidad y la viscosidad del fluido.



Experimento 4:

Medir la caída de presión para diferentes viscosidades de fluido, manteniendo constante la velocidad, la densidad del fluido y el diámetro.



Sigue........

Continuación de Análisis Dimensional........

Es posible variar la densidad y viscosidad del sistema cambiando el fluido de trabajo. La velocidad se puede variar aumentando o disminuyendo el caudal de líquido que pasa por la tubería. El diámetro se podría cambiar usando tuberías de distintos diámetros internos. Es evidente que el trabajo experimental involucrado es grande. Si pudieran agruparse las variables en dos módulos adimensionales (Π_1 y Π_2) se reducirían el número de experimentos a realizar. Esto es posible hacerlo siguiendo un método de análisis dimensional llamado el Teorema Pi de Buckingham.

Tema 2
Teorema Pi de Buckingham

De la explicación dada en la sección anterior, queda por responder el porqué se requieren dos números adimensionales y no uno o tres. Esta pregunta es respondida en el enunciado del Teorema de Pi de Buckingham que establece lo siguiente:

Si una ecuación que envuelve k variables es dimensionalmente homogénea, ésta puede ser reducida a relaciones entre los k-r productos adimensionales independientes (Pi), donde r es el mínimo número de DIMENSIONES DE REFERENCIA requeridas para describir las variables.

Los llamados *Productos Adimensionales Independientes* se conocen también bajo el nombre de *Términos Pi*.

Supongamos que la ecuación que envuelve las k variables tiene la forma de:

$$u_1 = f(u_2, u_3, ..., u_k)$$

entonces será posible reescribirla en términos de módulos adimensionales de la siguiente forma:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, ..., \Pi_{k-r})$$

Tema 3
Método de las variables repetidas

En la literatura existen diferentes métodos para hallar los términos Pi, de todos ellos hemos seleccionado el que ha demostrado ser el más sencillo y, por lo tanto, fácil de entender. Este método es conocido como el método de las VARIABLES REPETIDAS. A continuación se listarán los pasos a seguir con una pequeña explicación del porqué.

Paso 1: Listar todas las variables que están involucradas en el problema.

Este es uno de los pasos más difíciles de ejecutar, pues requiere una gran experticia del área de aplicación relacionada con el fenómeno que se estudia. Si este paso no se ejecuta bien, el resultado será completamente erróneo y, por lo tanto, inservible.

Paso 2: Expresar cada una de las variables en término de dimensiones básicas.

Por dimensiones básicas se entienden las dimensiones fundamentales que son necesarias para describir las variables involucradas en el fenómeno estudiado. En el caso de problemas de Mecánica Clásica, bastará sólo con las dimensiones Longitud (L), Masa (M) y Tiempo (T), pero también es posible seleccionar F, L y T.

Paso 3: Determinar el número requerido de términos Pi.

Esto se puede lograr aplicando directamente el enunciado del Teorema de Pi de Buckingham, ya que en él se establece claramente que el número de términos Pi será igual a k-r, donde k es el número de variables involucradas y r es el número de unidades de referencia.

Sigue........

Continuación de Pasos a seguir para la determinación de los términos Π_i........

Paso 4: Seleccionar el número de variables repetidas.

El número de variables repetidas no es más que el número de unidades de referencia.

Paso 5: Formar el número Pi multiplicando una de las variables no repetidas por el producto de las variables repetidas (cada una de estas últimas elevada a un exponente que hará la combinación adimensional).

Lo que debemos hacer aquí es seleccionar de la lista original $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_k\}$ "r" variables que sean sencillas y que contengan entre todas las dimensiones fundamentales que permitan junto a las de la variables no repetida generar un módulo adimensional.

Paso 6: Repetir el Paso 5 para el resto de las variables no repetidas.

Paso 7: Verificar que todos los números Pi obtenidos en los pasos 5 y 6 sean adimensionales.

En caso que no lo sean verificar el procedimiento seguido en los casos 5 y 6, pues se cometió un error.

Paso 8: Expresar el resultado final como una relación funcional.

Esta relación funcional tendría la forma de: $\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, ..., \Pi_{k-r})$

Ejemplo 4

Para ilustrar mejor el procedimiento explicado anteriormente, podremos trabajar con una aplicación típica de ingeniería, como lo es el cálculo de la caída de presión por unidad de longitud (Δp_l) en una tubería de paredes lisas de diámetro (D) por la cual circula un líquido newtoniano de densidad (ρ) y viscosidad (μ) conocidas.

Sigue........

Continuación de Pasos a seguir para la determinación de los términos Π_i........

Paso 1: $\Delta p_1 = f(D, \rho, \mu, V)$

Paso 2: Las dimensiones de referencia son L, M y T.

$\Delta p_1 = ML^{-2}T^{-2}$

$D = L$

$\rho = ML^{-3}$

$\mu = ML^{-1}T^{-1}$

$V = LT^{-1}$

Paso 3: k=5; r=3; k-r=5-3=2

Paso 4: Variables repetidas seleccionadas: D, ρ, V.

Paso 5: $\Pi_1 = \Delta p_1 D^a V^b \rho^c$

$M^0L^0T^0 = (ML^{-2}T^{-2})(L)^a(LT^{-1})^b(ML^{-3})^c$

Para M: $0 = 1 + c$

Para L: $0 = -2 + a + b - 3c$

Para T; $0 = -2 - b$

Resolviendo el sistema de ecuaciones: a=1, b=-2, c=-1.

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_1 D}{V^2 \rho}$$

Paso 6: Siguiendo un procedimiento similar: $\Pi_2 = \mu D^{a'} V^{b'} \rho^{c'}$, siendo

a'= -1; b'=-1; c'=-1.

Entonces,

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{DV\rho}$$

Sigue........

Continuación de Pasos a seguir para la determinación de los términos Π_i........

Paso 7: Verificar que los números son adimensionales.

$$\Pi_1 = \frac{(ML^{-2}T^{-2})(L)}{(ML^{-3})(LT^{-1})^2} = [1]$$

$$\Pi_2 = \frac{(ML^{-1}T^{-1})}{(L)(LT^{-1})(ML^{-3})} = [1]$$

Paso 8: $\Pi_1 = f(\Pi_2)$ ó $\Pi_1 = g(1/\Pi_2)$ {$1/\Pi_2$ es conocido como el número de Reynolds}.

De esta forma tenemos que:

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_1 D}{V^2 \rho} = g(\mathrm{Re}) = g\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$$

Es de hacer notar que la técnica de análisis dimensional no propone el tipo de funcionalidad (g) que relaciona los números adimensionales encontrados aplicando el Teorema de Pi Buckingham. Para hallar la función g se requiere de datos experimentales; de esta forma, mediante técnicas numéricas de ajustes de curvas o interpolación polinómica se puede proponer el tipo de funcionalidad que relaciona los números adimensionales Pi.

Tema 4
Método de los determinantes

Introducción

Otra técnica para hallar los números o módulos adimensionales Pi es utilizando el método de los determinantes. Para ello es necesario enunciar de una manera ligeramente diferente el Teorema Pi de Buckingham:

Sean Q_1, Q_2, Q_3........*Qn el conjunto de todas las magnitudes físicas que influyen en un cierto fenómeno, sean* m_1, m_2, m_3......m_k *el conjunto de magnitudes con dimensiones primarias (sistema de dimensiones, ver arriba) y sea* $f(Q_1, Q_2, Q_3, ...Qn)=0$, *la función que gobierna el comportamiento del fenómeno con* $n \geq k$, *entonces el fenómeno puede ser descrito por una función* $\phi(\pi_1;\pi_2;\pi_3;.......\pi_{n-h})=0$ *,siendo h el número mínimo de grupos adimensionales independientes que se pueden formar, y que se calcula según el procedimiento que se explica al realizar la demostración.*

Demostración Cada magnitud física Q puede expresarse como el producto de cada una de las magnitudes físicas m's, según:

Sigue........

Continuación de Introducción........

$$
\begin{array}{lllll}
Q_1 = & m_1^{\alpha_{11}} & m_2^{\alpha_{21}} & m_3^{\alpha_{31}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & m_k^{\alpha_{k1}} \\
Q_2 = & m_1^{\alpha_{12}} & m_2^{\alpha_{22}} & m_3^{\alpha_{32}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & m_k^{\alpha_{k2}} \\
Q_3 = & m_1^{\alpha_{13}} & m_2^{\alpha_{23}} & m_3^{\alpha_{33}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & m_k^{\alpha_{k3}} \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \bullet \\
Q_n = & m_1^{\alpha_{1n}} & m_2^{\alpha_{2n}} & m_3^{\alpha_{3n}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & .m_k^{\alpha_{kn}}
\end{array}
$$

Siendo los α_{ij} parámetros a determinar y se pueden considerar como elementos de los siguientes vectores columna P's:

$$
\vec{P}_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{k1} \end{vmatrix} ; \vec{P}_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{k2} \end{vmatrix} ; \vec{P} = \begin{vmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{k3} \end{vmatrix} ;\ldots\ldots\vec{P}_n = \begin{vmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \alpha_{3n} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{kn} \end{vmatrix}
$$

tales vectores pueden considerarse las columnas de la siguiente matriz:

$$
\Delta = \begin{bmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & . & . & . & . & \alpha_{1n} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & . & . & . & . & \alpha_{2n} \\
\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & . & . & . & . & \alpha_{3n} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \ . \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
\alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \alpha_{k3} & . & . & . & . & \alpha_{kn}
\end{bmatrix}
$$

Sigue........

Continuación de Introducción........

Sean ahora P_1, P_2, P_3........ P_h un conjunto de vectores linealmente independiente con el número máximo posible de vectores independientes de los contenidos en la matriz, luego los restantes vectores se pueden expresar como combinación lineal de estos h vectores (obsérvese que $k \geq h$).

$$
\begin{aligned}
P_{h+1} &= \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \beta_3 P_3 .... + \beta_h P_h \\
P_{h+2} &= \beta_1' P_1 + \beta_2' P_2 + \beta_3' P_3 .... + \beta_h' P_h \\
P_{h+3} &= \beta_1'' P_1 + \beta_2'' P_2 + \beta_3'' P_3 .... + \beta_h'' P_h \\
&\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \qquad\qquad \bullet \\
&\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \qquad\qquad \bullet \\
&\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \qquad\qquad \bullet \\
P_n = P_{h+(n-h)} &= \beta^{(n-h)_1} P_1 + \beta^{(n-h)_2} P_2 + \beta^{(n-h)_3} P_3 + ... + \beta^{(n-h)_h} P_h
\end{aligned}
$$

En forma de columnas; para cada vector P se tiene:

$$
P_{h+1} = \begin{vmatrix} \alpha_1,(h+1) \\ \alpha_2,(h+1) \\ \alpha_3,(h+1) \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_k,(h+1) \end{vmatrix} = \beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{k1} \end{vmatrix} + \beta_2 \begin{vmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{k2} \end{vmatrix} + ... + \beta_h \begin{vmatrix} \alpha_{1h} \\ \alpha_{2h} \\ \alpha_{3h} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{kh} \end{vmatrix}
$$

Sigue........

Continuación de Introducción........

$$\alpha_{1,h+1} = \beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{12} + \beta_3\alpha_{13} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_h\alpha_{1h}$$

$$\alpha_{2,h+1} = \beta_1\alpha_{21} + \beta_2\alpha_{22} + \beta_3\alpha_{23} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_h\alpha_{2h}$$

$$\begin{array}{ccccc} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{array}$$

$$\alpha_{k,h+1} = \beta_1\alpha_{k1} + \beta_2\alpha_{k2} + \beta_3\alpha_{k3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_h\alpha_{kh}$$

El primer miembro de las ecuaciones son los exponentes de las dimensiones de la magnitud Q_{h+1}.

La suma de los productos de los β por los α es el desarrollo de una suma de exponentes provenientes de un producto de potencias de igual base. Luego la magnitud Q_{h+1} se puede expresar como:

$$\begin{aligned} Q_{h+1} &= m_1^{\alpha_{1,h+1}}.m_2^{\alpha_{2,h+1}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m_k^{\alpha_{k,h+1}} \\ &= m_1^{\beta_1\alpha_{11}}.m_1^{\beta_2\alpha_{12}}.m_1^{\beta_3\alpha_{13}}\ldots\ldots\ldots\ldots m_1^{\beta_h\alpha_{1h}}. \\ &\quad m_2^{\beta_1\alpha_{21}}.m_2^{\beta_2\alpha_{22}}.m_2^{\beta_3\alpha_{23}}\ldots\ldots\ldots\ldots m_2^{\beta_h\alpha_{2h}}. \\ &\quad m_3^{\beta_1\alpha_{31}}.m_3^{\beta_2\alpha_{32}}.m_3^{\beta_3\alpha_{33}}\ldots\ldots\ldots\ldots m_2^{\beta_h\alpha_{3h}}. \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad m_k^{\beta_1\alpha_{k1}}.m_k^{\beta_2\alpha_{k2}}.m_k^{\beta_3\alpha_{k3}}\ldots\ldots\ldots\ldots m_k^{\beta_h\alpha_{kh}} \end{aligned}$$

entonces:

$$[Q_{h+1}] = [Q_1]^{\beta_1}.[Q_2]^{\beta_2}[Q_3]^{\beta_3}\ldots\ldots\ldots\ldots[Q_h]^{\beta_h}$$

Sigue........

Continuación de Introducción........

Como el primer miembro tiene las mismas dimensiones que el segundo miembro, el cociente de ambos es adimensional, luego:

$\pi_1 = \dfrac{Q_{h+1}}{Q_1^{\beta_1}.Q_2^{\beta_2}............Q_h^{\beta_h}}$ es un grupo adimensional. El número de grupos adimensionales que se pueden formar será entonces: n-h, donde $h \le k$.

Procedimiento para encontrar los grupos adimensionales

I. Se listan las n magnitudes Q que afectan el fenómeno.

II. Se elige un sistema de k dimensiones ordinarias.

III. Se escriben las dimensiones de las n magnitudes físicas Q.

IV. Se construye la matriz Δ con los exponentes de las dimensiones.

V. Se encuentra el orden del "menor" de mayor orden no nulo; sea h este orden. Esto quiere decir que se podrían obtener (n-h) grupos adimensionales.

VI. Se selecciona h de las n cantidades Q, cuyos vectores sean independientes entre sí.

VII. El primer π-término puede expresarse como el producto de las cantidades anteriormente escogidas, elevadas a los exponentes β desconocidos y otra magnitud elevada a un exponente conocido (generalmente la unidad). Obsérvese que cada π-término es función a lo sumo de h+1 magnitudes físicas.

Sigue........

Continuación de Procedimiento para encontrar los grupos adimensionales........

VIII. El segundo término se obtiene manteniendo las h magnitudes seleccionadas en VI y se cambia la magnitud cuyo exponente fue considerado como conocido. Este procedimiento se repite hasta encontrar los (n-h) grupos adimensionales.

IX. Para cada π-término se encuentran los exponentes desconocidos por medio del análisis adimensional.

Relaciones auxiliares:

- Si una cantidad es adimensional, ella es un π-término.
- Si existen dos magnitudes que tienen las mismas dimensiones, su cociente será un π-término.
- Cualquier π-término puede ser sustituido por una potencia del mismo, incluyendo su inverso.
- Cualquier π-término puede sustituirse por otro igual al anterior multiplicado por una constante.
- Cualquier π-término puede expresarse como una función de otro π-término.
- Después que se han obtenido los π-término por el procedimiento descrito, se debe operar con ellos según la información que aparece en las relaciones auxiliares, buscando en lo posible la transformación de los grupos obtenidos en grupos adimensionales de uso frecuente y con características que permitan compararlos con la experiencia. (ejemplos de estos grupos adimensionales son: Número de Reynolds, Prandlt, Nusselt, Grashof, Sherwood y otros).

Sigue........

Continuación de Procedimiento para encontrar los grupos adimensionales........

Ejemplo 5

Cuando una esfera cae libremente dentro de un fluido homogéneo tiene al final una velocidad constante; en ese momento el peso de la esfera es balanceado por el empuje y la fricción. Hacer un análisis dimensional del problema e indique cómo pueden relacionarse los datos. Desprecie los efectos de compresibilidad y la influencia de la rugosidad de la superficie.

Solución:

I. Determinación de los factores que afectan el fenómeno.

Al descender la esfera dentro del fluido, eventualmente alcanzará un estado de equilibrio dinámico, en el cual la sumatoria de fuerzas en la dirección del descenso debe satisfacer el siguiente balance:

Peso de la esfera = Empuje ejercido por el fluido + Fuerza de roce.

$$W = E + R$$
$$V_e \rho_e g = V_e \rho_{liq} g + f(\mu) V$$

Donde,

V_e = volumen de la esfera.

ρ_e = densidad de la esfera.

ρ_{liq} = densidad del fluido.

v = velocidad terminal de la esfera.

$g =$ aceleración de gravedad.

$f(\mu) =$ función de fricción que depende de μ.

Luego los factores que influyen en el fenómeno son:

$$f_1(D, \rho_e, g) = f_2(D, g, \rho_{liq}) + f_3(\mu, v)$$

Sigue........

Continuación de ejemplo........

Entonces, las magnitudes físicas son:

D, ρ_e, ρ_{liq}, μ, g , v

Luego

$$v = f\left(D, \rho_e, \rho_{liq}, \mu, g\right)$$

o bien,

$$\phi\left(D, \rho_e, \rho_{liq}, \mu, g, v\right)$$

II. En este problema las dimensiones primarias que forman parte del sistema son la longitud, masa y tiempo (no aparecen otras dimensiones como: temperatura, amperaje, etc.).

[L], [M], [t], por lo tanto k=3

III. Se escriben las dimensiones de las n (n=6) magnitudes físicas Q:

	L	M	t
D	1	0	0
ρ_e	-3	1	0
ρ_{liq}	-3	1	0
g	1	0	-2
μ	-1	1	-1
v	1	0	-1

Sigue........

Continuación de ejemplo........

IV. La matriz Δ será:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

V. El orden del menor de mayor orden no nulo es 3, luego h=3. En consecuencia, se podrán formar n-h=6-3=3 grupos adimensionales como mínimo.

VI. Se escogen h=3 cantidades con diferentes dimensiones. Sean v, m y D.

VII. Se construyen los π-términos de la siguiente manera:

$$\pi_1 = v^{\beta_1} \mu^{\beta_2} D^{\beta_3} \rho_{liq}$$

luego, con el análisis dimensional se pueden calcular los β_1, β_2, β_3.

[L]: $\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - 3 = 0$;

[M]: $\beta_2 + 1 = 0$;

[t]: $-\beta_1 - \beta_2 = 0$;

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene que $\beta_1=1$, $\beta_2=-1$, $\beta_3=1$ y, por consiguiente, el grupo adimensional es:

$\pi_1 = \dfrac{vD\rho_{liq}}{\mu}$ Observe que éste es el número de Reynolds.

VIII. Continuar obteniendo los demás grupos adimensionales restantes que en este caso son π_2 y π_3, cambiando ρ_{liq} por ρ_e y luego por g respectivamente:

Sigue........

Continuación de ejemplo........

Así, π_2 toma una forma similar π_1, por involucrar los mismos tipos de términos:

$$\pi_2 = \frac{vD\rho_e}{\mu}$$

Pero π_3 cambia por tener "g" unidades distintas a las de "ρ_{liq}":

$$\pi_3 = v^{\beta_1}\mu^{\beta_2}D^{\beta_3}g$$

$$[L] : \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - 2 = 0$$
$$[M] : \beta_2 = 0$$
$$[t] : -\beta_1 - \beta_2 - 2 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene que β_1=-2, β_2=0, β_3=1, luego:

$$\pi_3 = \frac{Dg}{v^2}$$

Aunque se han obtenido tres grupos adimensionales (que constituyen el máximo posible), el método no plantea que sean las únicas combinaciones posibles. Para este caso en particular, existen otros que son más fáciles de trabajar; por ejemplo de puede construir un nuevo grupo con: $\pi_{2'} = \frac{\pi_2}{\pi_1}$:

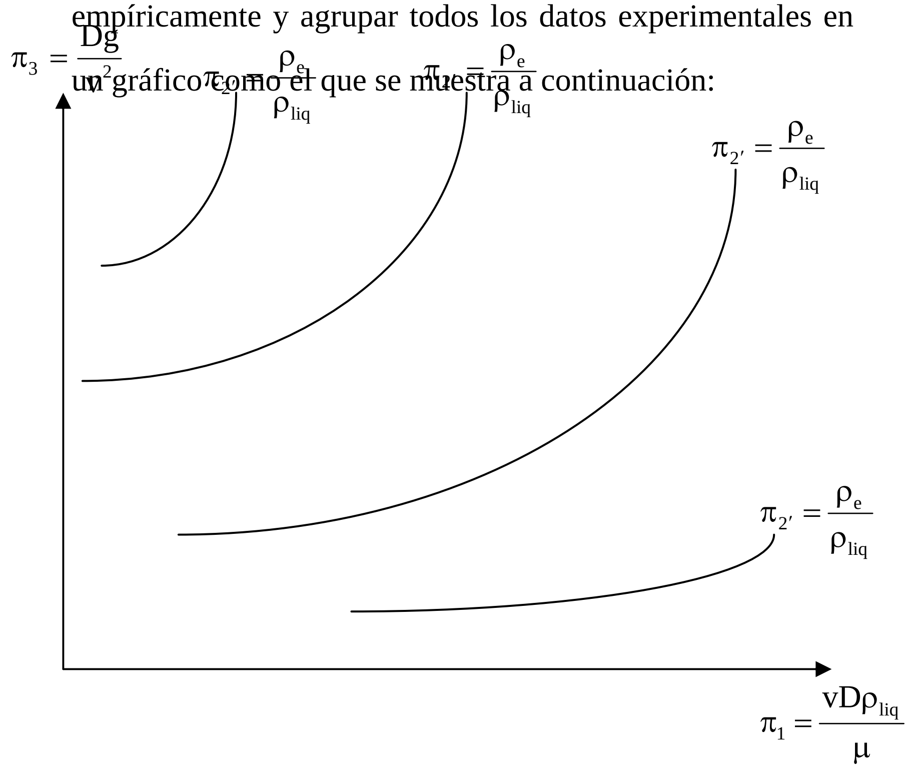
$$\text{Luego} : \pi_{2'} = \frac{\frac{vD\rho_e}{\mu}}{\frac{vD\rho_{liq}}{\mu}} = \frac{\rho_e}{\rho_{liq}}$$

Sigue........

Continuación de ejemplo........

$$\pi_{2'} = \frac{\rho_e}{\rho_{liq}}$$

Con los grupos $\pi_1, \pi_{2'} y\, \pi_3$ se pueden correlacionar empíricamente y agrupar todos los datos experimentales en un gráfico como el que se muestra a continuación:



Una vez conocidos D, ρ_e, ρ_{liq}, μ, g, se puede calcular v por la gráfica, despejando su valor a partir de π_3 leído de la gráfica combinándolo con un proceso iterativo, pues "v" también aparece en el término π_1 de las abscisas:

Sigue........

Continuación de ejemplo........

$$\pi_3 = G(\pi_1, \pi_2)$$

ó

$$\frac{D}{gv^2} = G\left(\frac{vD\rho_{liq}}{\mu}, \frac{\rho_e}{\rho_{liq}}\right)$$

REFERENCIAS

Felder, R. y R. Rousseau, Principios Elementales de los Procesos Químicos, 2da. Edición, Addison-Wesley Iberoamericana, Delaware, 1991.

Himmelblau, D., Basic Principles and Calculations in Chemical Engineering, Prentice-Hall International Series, London, 1989.

Hougen, O., Watson, K. y R. Ragatz, Principios de los Procesos Químicos, Tomo I: Balances de Materia y Energía. Editorial Reverté, S.A., Barcelona, 1982.

Ledanois, J. M. y A. L. López de Ramos, Magnitudes, Dimensiones y Conversiones de Unidades, Equinoccio, Caracas, 1996.

Munson, B., Young, D. y T. Okiishi, Fundamentals of Fluid Mechanics, John Wiley & sons, New York, 1990.

Perry, R. y D. Green, Perry´s Chemical Engineer´s Handbook, 6th. Ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.

Reklaitis, G., Balances de Materia y Energía, McGraw-Hill, México, 1989.

Whitweel, J. y R. Toner, Conservation of Mass and Energy, McGraw-Hill Kogakusha, LTD., Tokyo, 1969.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1: **Evaluación de la caída de presión por unidad de longitud**

La caída de presión por unidad de longitud, Δp_l, para el flujo de sangre por una arteria se puede simular como el flujo de un tubo horizontal de diámetro pequeño. Esta caída de presión por unidad de longitud es función del flujo volumétrico, Q, del diámetro, D, y de la viscosidad de la sangre, μ.

a) Realice un análisis dimensional al proceso usando la técnica del Teorema Pi de Buckingham y reporte los números adimensionales que rigen el proceso.
b) Si se realizan pruebas de laboratorio usando tubos capilares de 2 mm de diámetro y un fluido de viscosidad de 0,004 N.s/m^2, pueden obtenerse los siguientes datos experimentales:

Q x 10^6 (m^3/s)	**Δp(N/m^2) x 10^{-4}**
3,6	1,2
4,9	1,5
6,3	1,9
7,9	2,4
9,8	3,0

La caída de presión se mide en un tramo de capilar de 300 mm. Utilice estos datos experimentales para determinar una relación general para calcular la caída de presión Δp_l en función de las variables descritas en el problema.

Ejercicio 2: **Oscilación de un líquido en un tubo en "U"**

Un líquido está contenido en un tubo en "U" de los que se usan para medir presión manométrica. Cuando el líquido está desplazado de su posición de equilibrio y liberado, éste oscila con un período τ. Suponga que τ es una función de la aceleración de gravedad, g, y de la longitud de la columna, l. Algunas medidas realizadas en el laboratorio pueden hacerse variando l y midiendo τ, con g=32,2 ft/s2, son dadas en la siguiente tabla:

τ (s)	L (ft)
0,548	0,49
0,783	1,00
0,939	1,44
1,174	2,25

a)
b) Liste las variables de las cuales depende τ.
c) Utilizando el método Pi de Buckingham de Variables Repetidas, halle los números adimensionales que controlan el proceso.

d) Basado en estos datos experimentales y en el resultado del apartado (b), proponga una ecuación general para calcular el período τ.

Sigue........

Continuación Ejercicios........

Ejercicio 3: **Fuerza de arrastre de una esfera en movimiento**

La fuerza de arrastre de una esfera moviéndose a través de un fluido es función del diámetro de la esfera (D), la velocidad de la esfera (V), la densidad del fluido (ρ) y la viscosidad del fluido (μ). Pruebas de laboratorio realizadas con una esfera de 4 in de diámetro fueron realizadas en un túnel de agua y algunos datos del modelo se presentan en la Tabla 1. Para estos datos experimentales la viscosidad del agua era de $2{,}3 \times 10^{-5}$ lbf.s/ft^2 y la densidad de 1,94 slug/ft^3.

Tabla 1: Datos experimentales del modelo: esfera de 4 in de diámetro

Fuerza de arrastre sobre la esfera modelo, lbf	***Velocidad de la esfera modelo, ft/s***
0,18	2
0,70	4
1,50	6
2,80	8
4,30	10

Se le pide:

(a) Hallar los números adimensionales que rigen este fenómeno.

(b) Hallar una correlación que permita estimar la fuerza de arrastre en función de las variables que rigen el fenómeno. ¿Qué intervalo de aplicación tienen?

(c) Calcular la fuerza de arrastre sobre un balón de 8 ft de diámetro que se mueve a través de aire a una velocidad de 3 ft/s. Suponga que el aire tiene una viscosidad de $3{,}7 \times 10^{-7}$ lbf.s/ft^2 y una densidad de $2{,}30 \times 10^{-3}$ slug/ft^3 .